

Condiciones de borde.

La presencia de ρ_s y \mathbf{K} implica que pueden existir discontinuidades en \mathbf{E} y/o \mathbf{H} a lo largo de la superficie en la cual existen ρ_s y \mathbf{K} . Para evaluar esas discontinuidades es necesario volver a usar las ecuaciones de campo en forma integral, aplicándolas en una región que contiene la superficie y la presencia de ρ_s y \mathbf{K} . Las relaciones obtenidas son las condiciones de borde que gobiernan el comportamiento de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} en las superficies de fronteras.

Discontinuidades en las componentes normales.

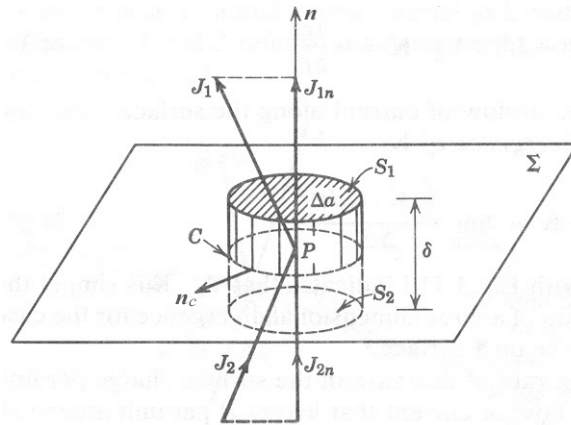


Figura 1

Figura para evaluar las condiciones de borde normales.

Se observa que ρ_s , \mathbf{K} y \mathbf{J} , que pueden estar en los dos lados de una superficie, deben satisfacer la ley de la conservación de carga. Considere una superficie Σ sobre la cual existe una densidad de carga superficial ρ_s y una densidad de corriente superficial \mathbf{K} y sean \mathbf{J}_1 y \mathbf{J}_2 las densidades de corriente en las partes superior e inferior respectivamente de Σ , como se muestra en la figura 1. Se aplica la ley de la conservación de carga en forma integral al tomar como S , la superficie del cilindro que consiste de dos superficies planas S_1 y S_2 paralela a Σ y otra superficie cilíndrica normal a Σ y de altura δ , intersectando Σ en el contorno cerrado C . Se aplica la ley de la conservación de carga,

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV \quad 5$$

dividiendo cada lado por Δa , el área de S_1 , S_2 , evaluando las integrales cuando $\delta \rightarrow 0$, y la superficie S colapsando sobre el punto P en Σ .

La corriente neta saliente de S , $\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ consiste de tres componentes: la componente I_1 , el flujo de \mathbf{J}_1 a través de S_1 , I_2 , el flujo de \mathbf{J}_2 a través de S_2 , e I_C , el flujo de la densidad de corriente superficial \mathbf{K} a través del contorno C .

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = I_1 + I_2 + I_C \quad 36$$

Aquí

$$I_1 = (\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{n}) \Delta a \quad 37$$

$$I_2 = -(\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{n}) \Delta a \quad 38$$

$$I_C = \oint_C (\mathbf{K} \cdot \mathbf{n}_c) dl \quad 39$$

Aquí \mathbf{n} es el vector unitario normal a Σ , \mathbf{n}_c es el vector unitario normal a dl y tangencial a Σ , y dl es un elemento diferencial de C . El signo negativo de (38) cambia la dirección de \mathbf{J}_2 para que I_2 esté saliendo de S_2 . La carga encerrada por S en $\iiint_V \rho dV$ de la ecuación (5) consiste sólo de una carga superficial encerrada por C . En el límite cuando $\delta \rightarrow 0$, $C \rightarrow P$ y

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \iiint_V \rho dV = \rho_s \Delta a \quad 40$$

La ecuación de la conservación de carga aplicada al elemento Δa en Σ se reduce a:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) \Delta a + \oint_C \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}_c dl = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \Delta a \quad 41$$

Al dividir por Δa , y luego $\Delta a \rightarrow 0$, se obtiene:

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) + \nabla_{\Sigma} \cdot \mathbf{K} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad 42$$

Aquí se ha definido el flujo neto de corriente que sale a lo largo de Σ por unidad de área como la divergencia bidimensional de \mathbf{K} .

$$\nabla_{\Sigma} \cdot \mathbf{K} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \left(\frac{\oint_C \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}_c dl}{\Delta a} \right) \quad 43$$

La tasa de decrecimiento de la carga superficial por unidad de área en P debe igualar al flujo neto de corriente que sale de P por unidad de área en todas direcciones – en la parte superior e inferior de Σ y a lo largo de la superficie. Entonces se tiene las condiciones de borde que describen el comportamiento de la discontinuidad en la componente de la densidad de corriente \mathbf{J} normal a una superficie que tenga ρ_s y \mathbf{K} .

La ecuación (42) es un suplemento a la ley de conservación de carga ya que la carga es singular sobre Σ , y ambas ecuaciones deben satisfacerse con \mathbf{J} para así satisfacer las leyes básicas de campos en el espacio libre.

El comportamiento de las componentes de \mathbf{E} y \mathbf{H} normal a Σ que contiene ρ_s , y \mathbf{K} sigue de manera semejante usando las ecuaciones (3) y (4):

$$\oiint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \rho dV \quad 3$$

$$\oiint_S \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad 4$$

Se toma el mismo cilindro como antes de superficie total S , evaluando las contribuciones cuando $\delta \rightarrow 0$, $C \rightarrow P$, en Σ . El flujo del campo finito a través del lado lateral de altura δ , cuando $\delta \rightarrow 0$, desaparece. En el límite cuando $\delta \rightarrow 0$, sólo S_1 y S_2 contribuyen al flujo del campo. Así se obtienen expresiones similares a las expresiones de I_1 e I_2 antes, las ecuaciones (37) y (38) pero con \mathbf{E} y \mathbf{H} en lugar de \mathbf{J} . La carga total encerrada en límite se reduce a ρ_s como la ecuación (40). Cuando se divide por Δa y en el límite cuando $\delta \rightarrow 0$, y $\Delta a \rightarrow 0$,

$$\mathbf{n} \cdot \mu_0 (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \quad 44$$

$$\mathbf{n} \cdot \epsilon_0 (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \rho_s \quad 45$$

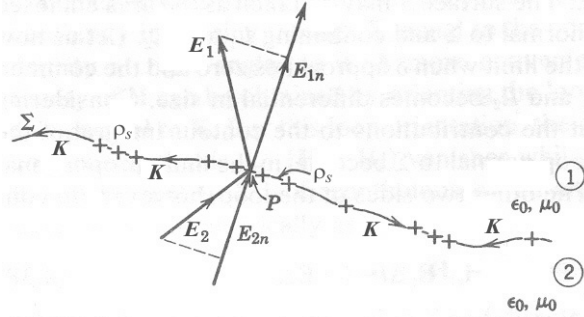


Figura 2.

La condición de borde correspondiente a $\epsilon_0 \mathbf{E}$ normal.

La ecuación (44) implica que las componentes de $\mu_0 \mathbf{H}$ normales a la superficie son continuas en la interfaz que contiene cargas superficiales y corrientes superficiales mientras que la ecuación (45) implica que las componentes de $\epsilon_0 \mathbf{E}$ normales a la superficie que contiene cargas superficiales y corrientes superficiales son discontinuas en una cantidad igual a la densidad de carga superficial ρ_s . Físicamente ρ_s es una fuente de \mathbf{E} y hace que más flujo de $\epsilon_0 \mathbf{E}$ sale de Σ de lo que entra en Σ . En la superficie o interfaz entre dos dieléctricos, normalmente $\rho_s = 0$, y $\mathbf{K} = \mathbf{0}$. Esto implica que tanto las componentes normales tanto de $\mu_0 \mathbf{H}$ como de $\epsilon_0 \mathbf{E}$ son continuas en la interfaz entre dos dieléctricos. Se puede, por ejemplo hacer que ρ_s exista en la interfaz de un dieléctrico, frotando el dieléctrico con seda etc., y en este caso $\epsilon_0 \mathbf{E}_{1n} \neq \epsilon_0 \mathbf{E}_{2n}$.

Las componentes tangenciales de los campos.

Para determinar el comportamiento de las componentes tangenciales de \mathbf{E} y \mathbf{H} en la interfaz entre dos regiones es necesario usar las ecuaciones (1) y (2) (integrales de línea) en presencia de ρ_s , y \mathbf{K} , la figura 3. Hay un contorno plano C que consiste de dos segmentos largos L_1, L_2 de longitud Δl paralelos a Σ y en lados opuestos de Σ y dos lados mucho más cortos de longitudes δ , normales a Σ . S es la superficie encerrada por C en el plano normal a Σ limitado por L_1, L_2 . Se evaluará la circulación en el límite cuando $\delta \rightarrow 0$ y las longitudes L_1, L_2 tienden a elementos diferenciales Δl .

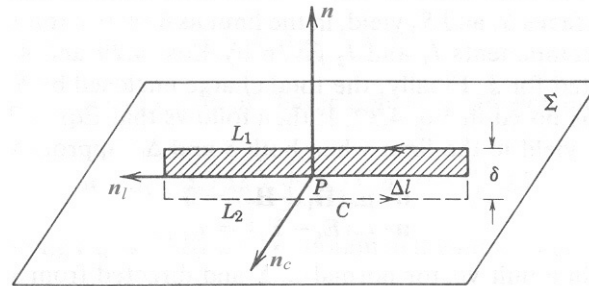


Figura 3

Figura para evaluar las condiciones de borde tangenciales.

Cuando $\delta \rightarrow 0$, la contribución a la integral de línea desaparece mientras las contribuciones debido L_1, L_2 se deben incluir en la integral de línea:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{1}_l \cdot \mathbf{E}_1 \Delta l - \mathbf{1}_l \cdot \mathbf{E}_2 \Delta l \quad 46$$

Aquí, $\mathbf{1}_l$ es un vector unitario paralelo de L_1, L_2 y por supuesto, cuando $\delta \rightarrow 0$, $\frac{d}{dt} \iint_S \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} \rightarrow 0$ ya que el área tiende a cero y por ende el flujo de $\mu_0 \mathbf{H}$ tiende a cero.

En la ecuación (46), $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ son los valores del campo \mathbf{E} en ambos lados de Σ . El resultado es:

$$\mathbf{1}_l \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad 47$$

La ecuación (47) implica que las componentes tangenciales de \mathbf{E} son continuas en la interfaz. Ahora $\mathbf{1}_l$ realmente puede tener cualquier orientación en el plano de Σ . Esta ambigüedad se elimina al escribir (47) como un producto vectorial,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0} \quad 48$$

La ecuación (48) siempre garantiza que las componentes encontradas son las componentes correctas tangenciales a Σ .

Finalmente la circulación de \mathbf{H} se puede evaluar como arriba. Las componentes a lo largo de δ desaparece en el límite cuando $\delta \rightarrow 0$ resultando en una expresión parecido a la ecuación (48) con \mathbf{H} en lugar de \mathbf{E} . Igualmente el flujo de $\epsilon_0 \mathbf{E}$ en el lazo rectangular también desaparece cuando $\delta \rightarrow 0$ ya que el área tiende a cero. Sin embargo el efecto de \mathbf{K} aún persiste y la corriente que resulta está dada por:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \mathbf{n}_c \cdot \mathbf{K} \Delta l \quad 49$$

Aquí \mathbf{n}_c es el vector unitario normal al contorno C y tangencial a Σ . Al disminuirse los segmentos L_1, L_2 a Δl y dividiendo por Δl se obtiene:

$$\mathbf{1}_t \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}_c \quad 50$$

La ecuación (50) implica que existe una discontinuidad en las componentes tangenciales de \mathbf{H} al pasar la interfaz entre dos medios y la discontinuidad es justamente \mathbf{K} , la densidad de corriente superficial. Como antes se llega a la condición de borde:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K} \quad 51$$

Aquí \mathbf{n} es normal a Σ .